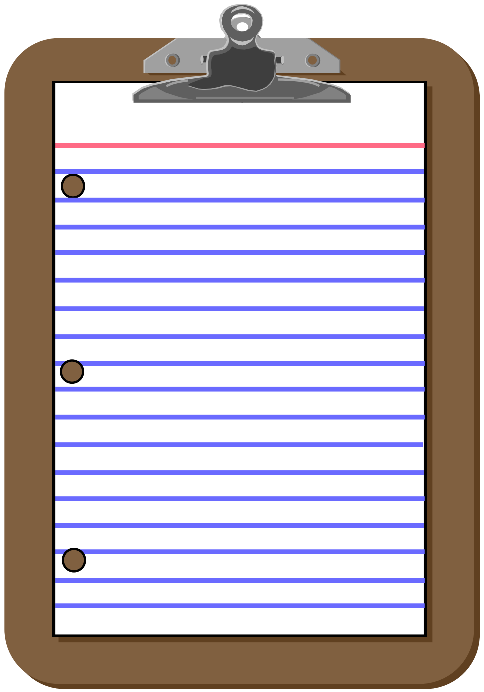
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Επιχειρησιακή Έρευνα

Γραμμικός Προγραμματισμός
Μέθοδος Simplex

Η παρουσίαση προετοιμάστηκε από τον Ν.Α. Παναγιώτου

Περιεχόμενα Παρουσίασης



1. **Πρότυπη Μορφή ΓΠ**
2. **Πινακοποίηση Μεθόδου**
3. **Ερμηνεία Βασικών Μεγεθών**
4. **Παραδείγματα**

Πρότυπη Μορφή Μαθηματικού Μοντέλου του Γενικού Προβλήματος ΓΠ

- Όλες οι ανισοϊσότητες θα πρέπει να γίνουν εξισώσεις για να επιλυθεί το πρόβλημα του ΓΠ
- Τους περιορισμούς της μορφής <= τους μετατρέπουμε σε ισότητες με την εισαγωγή μεταβλητών χαλαρότητας
- Τους περιορισμούς της μορφής >= τους μετατρέπουμε σε ισότητες με την εισαγωγή μεταβλητών περίσσειας
- Γενικότερα, οι μεταβλητές που εισάγονται για να μετατραπούν οι ανισοϊσότητες σε ισότητες ονομάζονται μεταβλητές αποκλίσεως (ή βοηθητικές ή ουδέτερες)

Ορισμένα Μαθηματικά… (1/2)

Πρώτη κατηγορία περιορισμών

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{hj} x_j <= b_h$$

$$x_{r+h} = b_h - \Sigma\, \alpha_{hj} x_j >= 0$$

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{hj} x_j + x_{r+h} = b_h$$

Δεύτερη κατηγορία περιορισμών

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj} x_j >= b_h$$

$$x_{r+k} = \Sigma\, \alpha_{kj} x_j - b_k >= 0$$

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj} x_j - x_{r+k} = b_k$$

Σταδιακά επιτυγχάνουμε την μετατροπή όλων των αρχικών περιορισμών στο ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{hj} x_j + x_{r+h} = b_h \qquad h = 1, 2, \ldots, u$$

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj} x_j - x_{r+k} = b_k \qquad k = u+1, u+2, \ldots, v$$

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_{\rho j} x_j = b_\rho \qquad \rho = v+1, v+2, \ldots, m$$

Ορισμένα Μαθηματικά… (2/2)

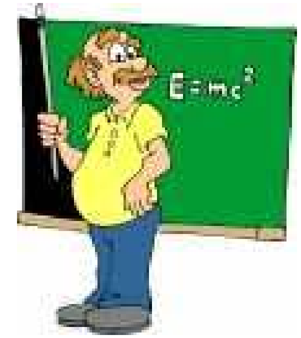
Τελικώς, καταλήγουμε στην μήτρα mxn που φαίνεται παρακάτω:

$$A = \left[\begin{array}{cccc|cccc|ccc}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1r} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{1r} & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & & & & & & & & & & \\
\alpha_{u1} & \alpha_{u2} & \dots & \alpha_{ur} & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\hline
\alpha_{u+1,\,1} & \alpha_{u+1,2} & \dots & \alpha_{u+1,r} & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\
\dots & & & & & & & & & & \\
\alpha_{v1} & \alpha_{v2} & \dots & \alpha_{vr} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 \\
\hline
\alpha_{v+1,1} & \alpha_{v+1,2} & \dots & \alpha_{v+1,r} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & & & & & & & & & & \\
\alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mr} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
\end{array}\right]$$

Τελικώς...

- Επειδή οι εισαγόμενες μεταβλητές αποκλίσεως έχουν μοναδιαίες αξίες μηδενικές, λέμε ότι οι αντίστοιχες δραστηριότητες είναι ουδέτερες
- Το πρόβλημα που προκύπτει με τους περιορισμούς των εξισώσεων έχει το ίδιο σύνολο βέλτιστων λύσεων με το αρχικό
- Η φυσική ερμηνεία των μεταβλητών αποκλίσεως είναι ότι παριστάνουν το μέρος του διαθεσίμου μέσου που μένει αχρησιμοποίητο

Προκαταρκτικά Θεωρίας Μεθόδου Simplex



max (ή min) z = cx

Ax = b (b>=0)

x>=0

Μοντέλο Γενικού Προβλήματος

Λύση: Κάθε λύση του Ax = b, δηλαδή κάθε διάνυσμα $x = [x_1, x_2, x_3, \ldots X_n]$ που ικανοποιεί το σύστημα αυτό

Εφικτή Λύση: Κάθε λύση του Ax = b που ικανοποιεί τους περιορισμούς (x>=0)

Βέλτιστη Δυνατή Λύση: Η εφικτή λύση που βελτιστοποιεί τη z

Παράδειγμα Πρότυπης Μορφής Μαθηματικού Μοντέλου του Γενικού Προβλήματος ΓΠ

$$\text{Max } \{4x_1 + 3x_2\}$$

υποκείμενο στους παρακάτω περιορισμούς:

$$2x_1 + 3x_2 <= 6$$
$$x_1 + 7x_2 >= 4$$
$$x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1, x_2 > 0$$

$z = 4x_1 + 3x_2 = c\,x$

$c = (4, 3, 0, 0)$

Με μεταβλητές απόκλισης

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1 + 7x_2 - x_4 = 4$$
$$x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1, x_2 > 0$$

Μητρική μορφή

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$

$b = [6, 4, 3]$

$\alpha_1 = [2, 1, 1]$

$\alpha_2 = [3, 7, 1]$

$\alpha_3 = [1, 0, 0]$

$\alpha_4 = [0, -1, 0]$

Παράδειγμα (1/3)

$$2X_1 + 3X_2 <= 6$$
$$X_1 + 7X_2 >= 4$$
$$X_1 + X_2 = 3$$
όπου, $X_1 >= 0,\ X_2 >= 0$

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 = 6$$
$$X_1 + 7X_2 - X_4 = 4$$
$$X_1 + X_2 = 3$$
όπου, $X_1 >= 0,\ X_2 >= 0,\ X_3 >= 0,\ X_4 >= 0$

X_3, X_4 =μεταβλητές αποκλίσεως

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

A X = b

Παράδειγμα (2/3)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$$

$X = [X_1, X_2, X_3, X_4]$

$b = [6, 4, 3]$

$\alpha_1 = [2, 1, 1]$ $\alpha_2 = [3, 7, 1]$

$\alpha_3 = [1, 0, 0]$ $\alpha_4 = [0, -1, 0]$

Παράδειγμα (3/3)

Η αντικειμενική συνάρτηση γράφεται:

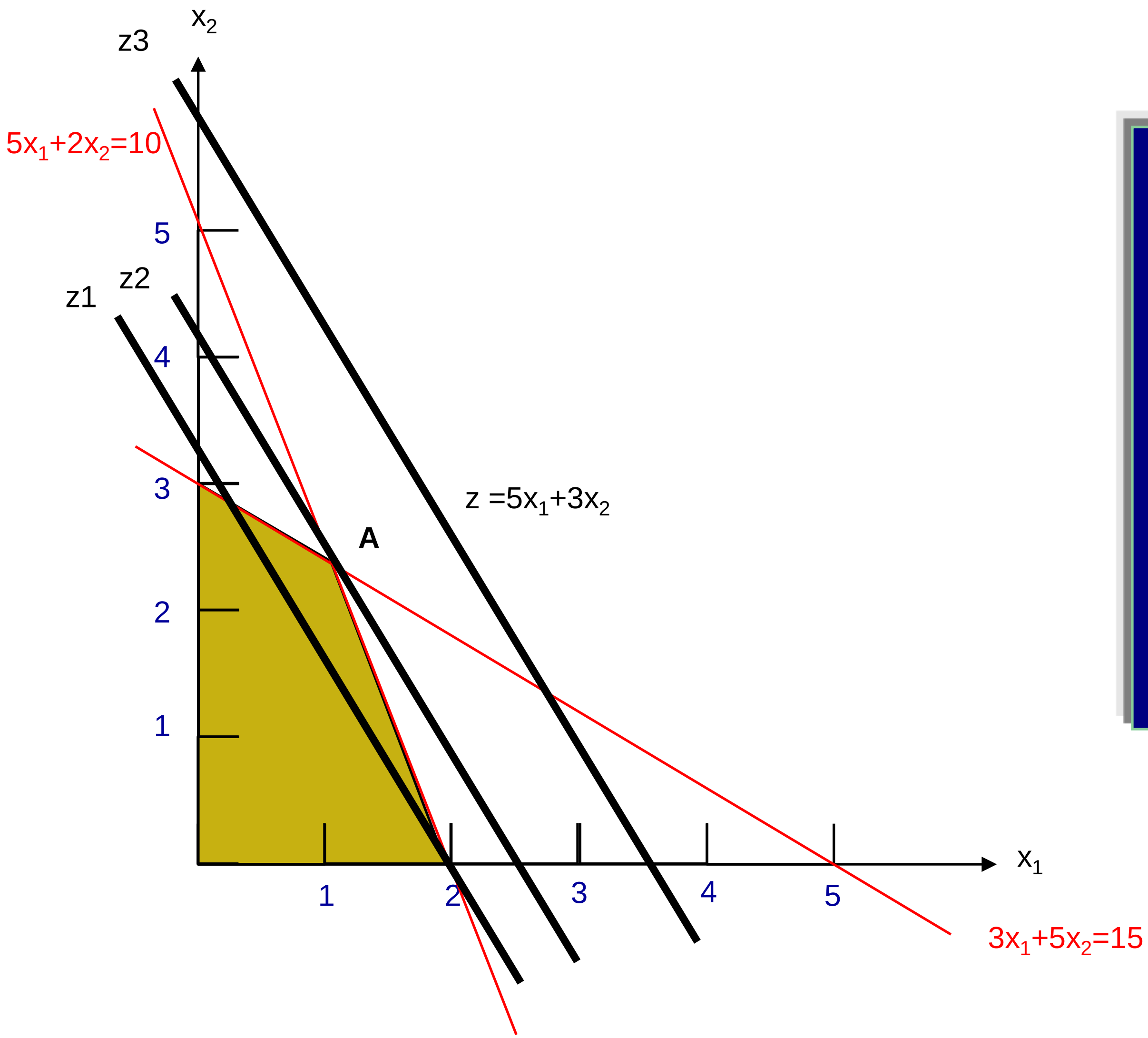
$$Z = 4X_1+3X_2 = C\,X = 4X_1+3X_2 + 0X_3 + 0X_4$$

$$C = (4, 3, 0, 0)$$

ή

$$Z = (C_1, C_2, C_3, C_4)\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}$$

Τυπική Περίπτωση Μεγιστοποιήσεως



$$\max z = 5x_1 + 3x_2$$

$$3x_1 + 5x_2 <= 15$$

$$5x_1 + 2x_2 <= 10$$

$$x_1 >= 0$$

$$x_2 >= 0$$

Λύσεις Προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού

- Για να έχει μία τουλάχιστον λύση η Ax=b, θα πρέπει ο βαθμός της μήτρας A να ισούται με το βαθμό της επαυξημένης μήτρας Ab (στήλες της A και στήλη b)
- Με άλλα λόγια, ο αριθμός των ανεξάρτητων εξισώσεων m θα πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος με τον αριθμό των μεταβλητών n

Εάν $m=n$,υπάρχει μόνο μία λύση

Εάν $m<n$,υπάρχουν άπειρες λύσεις

Εάν $m>n$,δεν υπάρχει λύση

Βάση Συστήματος Γραμμικών Αλγεβρικών Εξισώσεων

- Βάση Β είναι η τετραγωνική μήτρα m×m που προκύπτει από την Α και έχει m γραμμικά ανεξάρτητες στήλες
- Βασικές μεταβλητές (ή εξαρτημένες) ονομάζονται οι μεταβλητές που αντιστοιχούν στις στήλες μιας βάσεως Β
- Μη βασικές μεταβλητές (ή ανεξάρτητες) είναι οι n-m μεταβλητές που δεν είναι βασικές

Βάση Συστήματος Γραμμικών Αλγεβρικών Εξισώσεων

- $B = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m)$ η βασική μήτρα της A
- $\tilde{A} = (\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots \alpha_n)$ η υπομήτρα m x(n-m) των μη βασικών διανυσμάτων
- $x_B = [x_1, x_2, \ldots x_m]$ το διάνυσμα στήλης των βασικών μεταβλητών
- $\tilde{x} = [x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n]$ το διάνυσμα στήλης των μη βασικών μεταβλητών

$$A\,x = b \text{ ή } [B, \tilde{A}] \begin{bmatrix} x_B \\ \tilde{x} \end{bmatrix} = b \text{ ή}$$

$$B\,x_B + \tilde{A}\,\tilde{x} = b \text{ ή}$$

$$B^{-1} B\,x_B + B^{-1}\tilde{A}\,\tilde{x} = B^{-1} b \text{ ή } x_B = B^{-1} b - B^{-1}\tilde{A}\,\tilde{x}$$

Βάση Συστήματος Γραμμικών Αλγεβρικών Εξισώσεων

- Η σχέση $x_B = B^{-1}b - B^{-1}\tilde{A}\,\tilde{x}$ υποδηλώνει ότι λύση μπορεί να βρεθεί εάν εκλεγούν (n-m) αυθαίρετες τιμές για τα στοιχεία του $\tilde{x}$ και μετά προσδιορισθούν από αυτές τα στοιχεία του x_B. Γι' αυτό το λόγο τα στοιχεία του διανύσματος $\tilde{x}$ καλούνται και ανεξάρτητες μεταβλητές, του δε x_B εξαρτημένες
- Βασική (δυνατή) λύση ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων ως προς μια βάση B καλείται μία λύση που έχει το πολύ όλες τις βασικές μεταβλητές ως προς τη βάση αυτή διάφορες του μηδενός και όλες τις μη βασικές ίσες με το μηδέν
- Εκφυλισμένη βασική (δυνατή) λύση καλείται μία βασική όπου μία ή περισσότερες βασικές μεταβλητές είναι μηδενικές

Βασικά Θεωρήματα (1/2)

- Θεώρημα 1: Ο αριθμός των βασικών δυνατών λύσεων ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων είναι πεπερασμένος
- Θεώρημα 2: Το σύνολο των δυνατών λύσεων προβλήματος ΓΠ είναι κυρτό κλειστό σύνολο
- Θεώρημα 3: Κάθε βασική δυνατή λύση του προβλήματος ΓΠ είναι ένα ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου (κορυφή του πολυέδρου) των δυνατών λύσεων, και κάθε ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου είναι μια βασική δυνατή λύση του συστήματος των περιορισμών

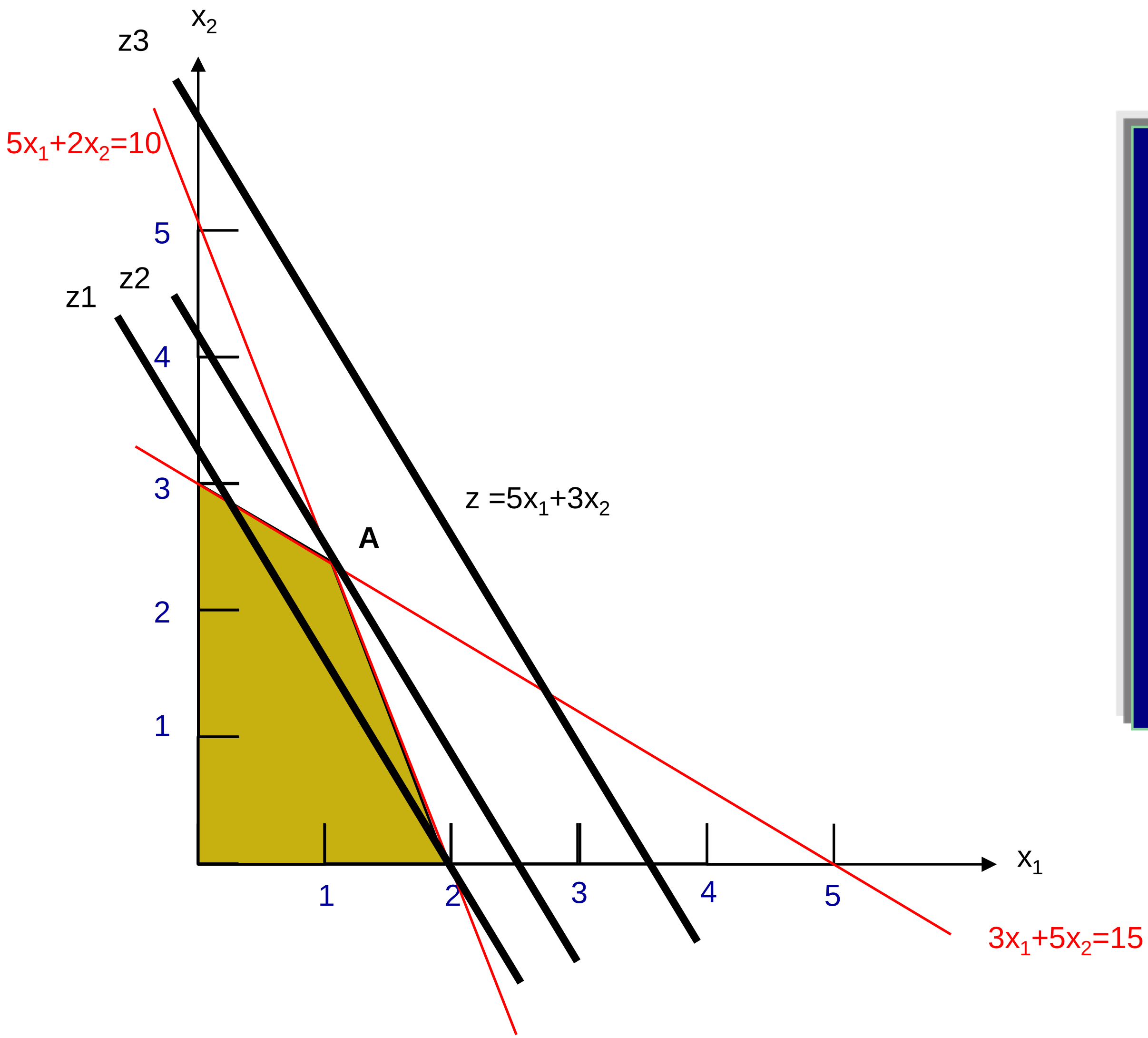
Βασικά Θεωρήματα (2/2)

- Θεώρημα 4: Αν υπάρχει μία δυνατή λύση του προβλήματος ΓΠ, υπάρχει και μία βασική δυνατή λύση αυτού
- Θεώρημα 5: Αν υπάρχει μια βέλτιστη δυνατή λύση του προβλήματος ΓΠ, τότε η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει τη βέλτιστη τιμή της σε ένα τουλάχιστον ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου των δυνατών λύσεων, δηλαδή σε μια βασική δυνατή λύση
- Πόρισμα: Αν υπάρχει τουλάχιστον μία βέλτιστη δυνατή λύση που δεν είναι βασική, τότε υπάρχουν άπειρες βέλτιστες δυνατές λύσεις

Σχόλια για τη Βέλτιστη Λύση

- Η κάθε γωνία του πολυτόπου της επιτρεπτής περιοχής ενός συστήματος με m περιορισμούς και n+m μεταβλητές ορίζεται το πολύ από m μεταβλητές θετικές και τουλάχιστον n μεταβλητές (τις υπόλοιπες) ίσες με το μηδέν
- Η βέλτιστη λύση ενός προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού το οποίο έχει m περιορισμούς και n+m μεταβλητές χαρακτηρίζεται το πολύ από m μεταβλητές θετικές και τουλάχιστον n μεταβλητές (τις υπόλοιπες) ίσες με το μηδέν

Τυπική Περίπτωση Μεγιστοποιήσεως



$$\max z = 5x_1 + 3x_2$$

$$3x_1 + 5x_2 <= 15$$

$$5x_1 + 2x_2 <= 10$$

$$x_1 >= 0$$

$$x_2 >= 0$$

Βασική Προσέγγιση Μεθόδου Simplex (1/3)

- Η μέθοδος Simplex ξεκινά από μία αρχική δυνατή λύση
- Επιλέγονται κάποιες μεταβλητές ως βασικές, ενώ οι υπόλοιπες είναι μη βασικές και επομένως είναι μηδενικές (δε συμμετέχουν στη διαμόρφωση του αποτελέσματος της αντικειμενικής συνάρτησης)
- Στη συνέχεια, η βασική μεταβλητή εξέρχεται από τη βάση και στη θέση της εισέρχεται μία μη βασική

Βασική Προσέγγιση Μεθόδου Simplex (2/3)

- Η μεταβλητή που εξέρχεται είναι αυτή που είναι η λιγότερο «χρήσιμη» και αυτή που εισέρχεται είναι αυτή που βελτιώνει με ταχύτερο βήμα την αντικειμενική συνάρτηση
- Οι ανταλλαγές μεταξύ βασικών και μη βασικών μεταβλητών (μία τη φορά) συνεχίζεται μέχρι τη στιγμή που δεν μπορεί να επιτευχθεί περαιτέρω βελτίωση
- Σε αυτό το σημείο, ο αλγόριθμος έχει επιτύχει τη βέλτιστη λύση

Βασική Προσέγγιση Μεθόδου Simplex (3/3)

- Η μέθοδος Simplex δεν αναζητά όλους τους πιθανούς συνδυασμούς λύσεων οι οποίες έχουν m περιορισμούς και n μεταβλητές αλλά μόνο ένα πολύ μικρό υποσύνολο αυτών

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (1/7)

Max $z = 6\,x_1 + 5\,x_2$

υποκείμενο στους παρακάτω περιορισμούς:

$8\,x_1 + 11\,x_2 <= 28$
$4\,x_1 + 3\,x_2 <= 8$
$x_1, x_2 > 0$

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{array} \qquad\qquad \mathbf{X} \;=\; \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 11 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$\beta_1 = \alpha_3$

$\beta_2 = \alpha_4$

$$x_B = \begin{bmatrix} 28 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$c_B = (0, 0)$

$x_1 = x_2 = 0$

$z = c_B\, x_B$

$\bar{c}_j = c_j - z_j = c_j - c_B\, y_j = c_j$

$y_j = B^{-1}\, a_j = a_j$

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (2/7)

c_B	Cj	6	5	0	0	x_B (b)
	βάση	(x_1) α_1	(x_2) α_2	(x_3) α_3	(x_4) α_4	
0 c_{B1}	$\beta_1 = \alpha_3$	8 y_{11}	11 y_{12}	1 y_{13}	0 y_{14}	28 x_{B1}
r 0 c_{B2}	$\beta_2 = \alpha_4$	4 y_{21}	3 y_{22}	0 y_{23}	1 y_{24}	8 x_{B2}
	$c_j - z_j$	6	5	0	0	$z = 0$

κ

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (3/7)

- Το μη βασικό διάνυσμα που θα εισέλθει σε προβλήματα μεγιστοποιήσεως είναι αυτό για το οποίο έχουμε το μεγαλύτερο θετικό οριακό καθαρό εισόδημα
- Όταν όλα τα οριακά καθαρά οριακά εισοδήματα γίνονται <= 0, τότε έχει βρεθεί η βέλτιστη λύση
- Σε περίπτωση προβλήματος ελαχιστοποιήσεως επιλέγεται το διάνυσμα με το απολύτως μεγαλύτερο αρνητικό οριακό καθαρό εισόδημα

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (4/7)

- Το διάνυσμα που θα εξέλθει σε προβλήματα μεγιστοποιήσεως είναι αυτό το οποίο προσδιορίζεται από την σχέση:

$$\theta = x_{Br} / y_{rk} = \min (x_{Bi} / y_{ik} , y_{ik} > 0)$$

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (5/7)

	Cj	6	5	0	0	
c_B	βάση	(x_1) α_1	(x_2) α_2	(x_3) α_3	(x_4) α_4	x_B (b)
0 c_{B1} r	$\beta_1 = \alpha_3$	0 y_{11}	5 y_{12}	1 y_{13}	-2 y_{14}	12 x_{B1}
6 c_{B2}	$\beta_2 = \alpha_1$	1 y_{21}	0.75 y_{22}	0 y_{23}	0.25 y_{24}	2 x_{B2}
	$c_j - z_j$	0	0.5	0	-1.5	z = 12

κ

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (6/7)

c_B	Cj	6	5	0	0	x_B (b)
	βάση	(x_1) α_1	(x_2) α_2	(x_3) α_3	(x_4) α_4	
5 c_{B1}	$\beta_1 = \alpha_2$	0 y_{11}	1 y_{12}	0.20 y_{13}	-0.40 y_{14}	2.4 x_{B1}
6 c_{B2}	$\beta_2 = \alpha_1$	1 y_{21}	0 y_{22}	-0.15 y_{23}	0.55 y_{24}	0.2 x_{B2}
	$c_j - z_j$	0	0	-0.10	-1.30	z = 13.2

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (7/7)

…και τα τελικά αποτελέσματα είναι τα ακόλουθα:

$x_2^* = 2.4$

$x_1^* = 0.2$

$z^* = 13.2$

Οδηγίες Συμπλήρωσης Πίνακα Simplex (1/7)

1. Επιλέγουμε τη μεταβλητή που θα εισέλθει στη βάση. Εισέρχεται αυτή που παρουσιάζει το μεγαλύτερο οριακό καθαρό εισόδημα c_j-z_j (τελευταία σειρά του πίνακα).

	Cj	6	5	0	0	
c_B	βάση	(x_1)	(x_2)	(x_3)	(x_4)	x_B
0	x_3	8	11	1	0	28
0	x_4	4	3	0	1	8
	$c_j - z_j$	6	5	0	0	z = 0

Είσοδος x_1

Οδηγίες Συμπλήρωσης Πίνακα Simplex (2/7)

2. Επιλέγουμε τη μεταβλητή που θα εξέλθει από τη βάση με βάση το κριτήριο εξόδου. Εξέρχεται αυτή με το min $\{x_B/y_{ik}\}$ για τα y_{ik} που ορίζονται από τη στήλη της μεταβλητής που εισέρχεται στη βάση στην επόμενη επανάληψη (μόνο για $y_{ij}>0$).

c_B	Cj / βάση	6 (x_1)	5 (x_2)	0 (x_3)	0 (x_4)	x_B
0	x_3	8	11	1	0	28
0	x_4	4	3	0	1	8
	$c_j - z_j$	6	5	0	0	z = 0

Έξοδος x_4

Είσοδος x_1

Min{28/8,8/4} = 8/4, που αντιστοιχεί στη μεταβλητή x_4, η οποία και εξέρχεται

Οδηγίες Συμπλήρωσης Πίνακα Simplex (3/7)

3. Συμπληρώνουμε το νέο πίνακα Simplex σε 4 βήματα:

α. Συμπληρώνουμε τα μοναδιαία διανύσματα των μεταβλητών που είναι στη βάση.

c_B	Cj	6	5	0	0	x_B
	βάση	(x_1)	(x_2)	(x_3)	(x_4)	
0	x_3	0		1		
6	x_1	1		0		
	$c_j - z_j$	0		0		z

Οδηγίες Συμπλήρωσης Πίνακα Simplex (4/7)

3. Συμπληρώνουμε το νέο πίνακα Simplex σε 4 βήματα:

β. Συμπληρώνουμε τη γραμμή του πίνακα που αντιστοιχεί στη μεταβλητή που εισήλθε διαιρώντας τα αντίστοιχα στοιχεία του προηγούμενου πίνακα με το στοιχείο τομής της στήλης της μεταβλητής που εισήλθε και της γραμμής της μεταβλητής που εξήλθε.

c_B	Cj	6	5	0	0	x_B (b)
	βάση	(x_1) α_1	(x_2) α_2	(x_3) α_3	(x_4) α_4	
0 c_{B1}	$\beta_1 = \alpha_3$	8 y_{11}	11 y_{12}	1 y_{13}	0 y_{14}	28 x_{B1}
r 0 c_{B2}	$\beta_2 = \alpha_4$	4 y_{21}	3 y_{22}	0 y_{23}	1 y_{24}	8 x_{B2}
	$c_j - z_j$	6	5	0	0	z = 0

κ

c_B	Cj	6	5	0	0	x_B
	βάση	(x_1)	(x_2)	(x_3)	(x_4)	
0	x_3	0		1		
6	x_1	1	0.75	0	0.25	2
	$c_j - z_j$	0		0		z

3/4 = 0.75

1/4 = 0.25

8/4 = 0.25

Οδηγίες Συμπλήρωσης Πίνακα Simplex (5/7)

3. Συμπληρώνουμε το νέο πίνακα Simplex σε 4 βήματα:

γ. Εφαρμόζουμε τον μνημονοτεχνικό κανόνα του πλαγιαστού Π εκτελώντας τις πράξεις: α-β/γ*δ για όλα τα κελιά που παραμένουν κενά εκτός του z.

	Cj	6	5	0	0	
c_B	βάση	(x_1)	(x_2)	(x_3)	(x_4)	x_B
0	x_3	8	11	1	0	28
0	x_4	4 γ	3 δ	0	1	8
	$c_j - z_j$	6 β	5 α	0	0	z = 0

	Cj	6	5	0	0	
c_B	βάση	(x_1)	(x_2)	(x_3)	(x_4)	x_B
0	x_3	0	5	1	-2	12
6	x_1	1	0.75	0	0.25	2
	$c_j - z_j$	0	0.5	0	-1.5	z

α-β/γ*δ = 5-6/4*3 = 0.5

Οδηγίες Συμπλήρωσης Πίνακα Simplex (6/7)

3. Συμπληρώνουμε το νέο πίνακα Simplex σε 4 βήματα:

δ. Εφαρμόζουμε τον μνημονοτεχνικό κανόνα του πλαγιαστού Π εκτελώντας τις πράξεις: α+β/γ*δ για το z.

c_B	Cj	6	5	0	0	x_B
	βάση	(x_1)	(x_2)	(x_3)	(x_4)	
0	x_3	8	11	1	0	28
0	x_4	4 γ	3	0	1	δ 8
	$c_j - z_j$	6 β	5	0	0	α z = 0

c_B	Cj	6	5	0	0	x_B
	βάση	(x_1)	(x_2)	(x_3)	(x_4)	
0	x_3	0	5	1	-2	12
6	x_1	1	0.75	0	0.25	2
	$c_j - z_j$	0	0.5	0	-1.5	z=12

α+β/γ*δ = 0+6/4*8 = 12

Οδηγίες Συμπλήρωσης Πίνακα Simplex (7/7)

4. Ελέγχουμε τα οριακά καθαρά εισοδήματα για να δούμε εάν έχουμε φτάσει στη βέλτιστη λύση (που θα συμβεί όταν όλα τα οριακά καθαρά εισοδήματα είναι 0 ή αρνητικά).

	Cj	6	5	0	0	
c_B	βάση	(x_1)	(x_2)	(x_3)	(x_4)	x_B
0	x_3	0	5	1	-2	12
6	x_1	1	0.75	0	0.25	2
	$c_j - z_j$	0	0.5	0	-1.5	z=12

Απαιτείται και νέα επανάληψη

Πίνακας Μεθόδου Simplex

	c_j	c_1	c_2	…	c_j	…	c_n	
c_{Bi}	Βάση	(x_1) a_1	(x_2) a_2	… …	(x_j) a_j	… …	(x_n) a_n	(x_{Bi}) (b)
c_{B1}	β_1	y_{11}	y_{12}	…	y_{1j}	…	y_{1n}	x_{B1}
c_{B2}	β_2	y_{21}	y_{22}	…	y_{2j}	…	y_{2n}	x_{B2}
…	…	…	…	…	…	…	…	…
c_{Bm}	β_m	y_{m1}	y_{m2}	…	y_{mj}	…	y_{mn}	x_{Bm}
$c_j - z_j$		$c_1 - z_1$	$c_2 - z_2$	…	$c_j - z_j$	…	$c_n - z_n$	z

r

k

Υπολογισμός Στοιχείων Νέου Πίνακα

	c_j	c_1	c_2	…	c_j	…	c_n	
c_{Bi}	Βάση	(x_1) a_1	(x_2) a_2	… …	(x_j) a_j	… …	(x_n) a_n	(x_{Bi}) (b)
c_{B1}	β_1	y_{11}	y_{12}	…	y_{1j}	…	y_{1n}	x_{B1}
c_{B2}	β_2	y_{21}	y_{22}	…	y_{2j}	…	y_{2n}	x_{B2}
…	…	…	…	…	…	…	…	…
c_{Bm}	β_m	y_{m1}	y_{m2}	…	y_{mj}	…	y_{mn}	x_{Bm}
$c_j - z_j$		$c_1 - z_1$	$c_2 - z_2$	…	$c_j - z_j$	…	$c_n - z_n$	z

r

k

$$\hat{y}_{rj} = y_{rj} \,/\, y_{rk}$$

$$\hat{y}_{ij} = y_{ij} - (y_{ik} \,/\, y_{rk})\, y_{rj}$$

$$\hat{z} = z + [(c_k - z_k) \,/\, y_{rk}]\, x_{Br}$$

$$\hat{x}_{Br} = x_{Br} \,/\, y_{rk}$$

$$\hat{x}_{Bi} = x_{Bi} - (y_{ik} \,/\, y_{rk})\, x_{Br}$$

$$c_j - \hat{z}_j = (c_j - z_j) - y_{rj}\,(c_k - z_k) \,/\, y_{rk}$$

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (1/8)

$$\text{Max } z = 50\,x_1 + 40\,x_2$$

υποκείμενο στους παρακάτω περιορισμούς:

$$3\,x_1 + 5\,x_2 <= 150$$

$$x_2 <= 20$$

$$8\,x_1 + 5\,x_2 <= 300$$

$$x_1, x_2 > 0$$

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (2/8)

$$\text{Max } z = 50\,x_1 + 40\,x_2 + 0\,s_1 + 0\,s_2 + 0\,s_3$$

υποκείμενο στους παρακάτω περιορισμούς:

$$3\,x_1 + 5\,x_2 + 1s_1 = 150$$

$$1\,x_2 + 1\,s_2 = 20$$

$$8\,x_1 + 5\,x_2 + 1\,s_3 = 300$$

$$x_1, x_2 > 0$$

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (3/8)

c_B	C_j	C_1	C_2	…	C_n	x_B (b)
	βάση	(x_1) α_1	(x_2) α_2	…	(x_n) α_n	
	β_1	α_{11}	α_{12}	…	α_{1n}	b_1
	β_2	α_{21}	α_{22}	…	α_{2n}	b_2
	β_m	α_{m1}	α_{m2}	…	α_{mn}	b_m
	$c_j - z_j$					z

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (4/8)

	C_j	50	40	0	0	0	
c_B	βάση	(x_1)	(x_2)	S_1	S_2	S_3	(b)
0	s_1	3	5	1	0	0	150
0	s_2	0	1	0	1	0	20
0	s_3	8	5	0	0	1	300
	$c_j - z_j$						z

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (5/8)

c_B	C_j / βάση	50 (x_1)	40 (x_2)	0 S_1	0 S_2	0 S_3	(b)
0	s_1	3	5	1	0	0	150
0	s_2	0	1	0	1	0	20
0	s_3	8	5	0	0	1	300
	$c_j - z_j$	50	40	0	0	0	z=0

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (6/8)

c_B	C_j / βάση	50 (x_1)	40 (x_2)	0 S_1	0 S_2	0 S_3	(b)
0	s_1	0	25/8	1	0	-3/8	75/2
0	s_2	0	1	0	1	0	20
50	x_1	1	5/8	0	0	1/8	75/2
	$c_j - z_j$	0	70/8	0	0	-50/8	z=1875

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (7/8)

	C_j	50	40	0	0	0	
c_B	βάση	(x_1)	(x_2)	(S_1)	(S_2)	(S_3)	(b)
40	x_2	0	1	8/25	0	-3/25	12
0	s_2	0	0	-8/25	1	3/25	8
50	x_1	1	0	-5/25	0	5/25	30
	$c_j - z_j$	0	0	-14/5	0	-26/5	z=1980

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex (8/8)

…και τα τελικά αποτελέσματα είναι τα ακόλουθα:

$x_2^* = 12$

$x_1^* = 30$

$s_2^* = 8$

$z^* = 1980$

Παράδειγμα Κενού Πίνακα Simplex

	C_j	50	40			0	
c_B	βάση	(x_1)	(x_2)	S_1	S_2	S_3	(b)
0	s_1	0	25/8	1	0	-3/8	75/2
0	s_2	0	1		1	0	20
	x_1		5/8	0	0	1/8	75/2
	$c_j - z_j$						

Συμβολισμοί

- C_j: Οι σταθερές των μεταβλητών i της αντικειμενικής συνάρτησης
- b_i: Οι δεξιές τιμές (όρια) των ισοτήτων
- α_{ij}: Οι δείκτες των μεταβλητών j στους περιορισμούς i

Συμβολισμών Συνέχεια...

- z_j: Εκφράζει τη μείωση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης εάν μία μονάδα της μεταβλητής που αντιστοιχεί στη στήλη j εισέλθει στη βάση
- c_j - z_j: Εκφράζει την τελική καθαρή αλλαγή στην αντικειμενική συνάρτηση εάν μία μονάδα της μεταβλητής που αντιστοιχεί στη στήλη j εισέλθει στη βάση

Παράδειγμα Μεθόδου Simplex – Επεξήγηση Οριακού Καθαρού Εισοδήματος

Max z =6 x_1 + 5 x_2

υποκείμενο στους παρακάτω περιορισμούς:

8 x_1 + 11 x_2 <= 28
4 x_1 + 3 x_2 <= 8
x_1, x_2 >0

$$\begin{bmatrix} 8 & 11 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 8 \end{bmatrix}$$

α_1 α_2 α_3 α_4 **X = b**

$\beta_1 = \alpha_3$

$\beta_2 = \alpha_4$

$$x_B = \begin{bmatrix} 28 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$c_B = (0, 0)$

$x_1 = x_2 = 0$

$z = c_B x_B$

$\bar{c}_j = c_j - z_j = c_j - c_B y_j = c_j$

$y_j = B^{-1} a_j = a_j$

Επεξήγηση z_j (1/3)

- Έστω ότι αποφασίζουμε να αυξήσουμε κατά 1 μονάδα την τιμή της μη βασικής μεταβλητής x_1
- Για να συνεχίσουν να ικανοποιούνται οι περιορισμοί θα πρέπει οι τιμές των βασικών μεταβλητών να αλλάξουν.
- Οι σταθερές της στήλης x_1 δείχνουν το ποσό μείωσης στις παρούσες βασικές μεταβλητές όταν η μη βασική μεταβλητή x_1 αυξηθεί κατά 1. Αντίστοιχα ισχύουν για τις σταθερές όλων των μεταβλητών.

Επεξήγηση z_j (2/3)

- Παράδειγμα: Έστω ο περιορισμός:

  $8\ x_1 + 11\ x_2 <= 28$ ή

  $8\ x_1 + 11\ x_2 + 1\ x_3 = 28$

- Αν αυξηθεί το x_1 κατά 1, θα πρέπει να μειωθεί το x_3 κατά 8
- Η σταθερά 8 είναι ο συντελεστής y_{11}
- Αντίστοιχα συμβαίνει και για τα υπόλοιπα y_{ij}

Επεξήγηση z_j (3/3)

- Παράδειγμα: Εάν η x_2 γίνει βασική, τότε η x_3 θα πρέπει να μειωθεί κατά 11 και η x_4 κατά 3
- Για να υπολογιστούν τα z_j (η μείωση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης αν η x_j αυξηθεί κατά 1) θα πρέπει να υπολογιστούν τα αντίστοιχα αθροίσματα των γινομένων των c_B με τους αντίστοιχους συντελεστές.
- Παράδειγμα: Το z_1 είναι $y_{11}\ c_3 + y_{21}\ c_4 = 8 \times 0 + 4 \times 0 = 0$

Υπολογισμός z_j (1/3)

- Έστω ότι μία μη βασική μεταβλητή, ας είναι αυτή η x_1 αυξάνεται κατά 1 (από 0 γίνεται 1)
- Για να συνεχίσουν να ικανοποιούνται οι περιορισμοί θα πρέπει να αλλάξουν οι τιμές κάποιων άλλων βασικών μεταβλητών

Υπολογισμός z_j (2/3)

$3\ x_1 + 5\ x_2 + 1s_1 = 150$ (1ος περιορισμός)

Για $x_1=1$, $3 + 1\ s_1= 150$ ή $s_1 =150 – 3$ (μείωση κατά 3)

$x_2 + 1s_2 = 20$ (2ος περιορισμός)

Δεν υπάρχει καμία μείωση (μείωση κατά 0)

$8\ x_1 + 5\ x_2 + 1s_3 = 300$ (3ος περιορισμός)

Για $x_1=1$, $8 + 1\ s_3= 300$ ή $s_3 =300 – 8$ (μείωση κατά 8)

Άρα $z_1 = 0 * (3) + 0 * (0) + 0 * (8) = 0$

Υπολογισμός z_j (3/3)

- Τα z_j υπολογίζονται πολλαπλασιάζοντας τα C_B με τα αντίστοιχα α_{ij}
- Έχουμε στο παράδειγμά μας:
  - $Z_1 = 0(3) + 0(0) + 0(8)$
  - $Z_2 = 0(5) + 0(1) + 0(5)$
  - $Z_3 = 0(1) + 0(0) + 0(0)$
  - $Z_4 = 0(0) + 0(1) + 0(0)$
  - $Z_5 = 0(0) + 0(0) + 0(1)$

Υπολογισμός c_j - z_j

- Από τη μια υπάρχει μείωση της αντικειμενικής συνάρτησης λόγω μείωσης κάποιων βασικών μεταβλητών, από την άλλη υπάρχει όμως πιθανή αύξηση λόγω της αύξησης της μη βασικής μεταβλητής κατά μία μονάδα
- Γι’ αυτό το λόγο υπολογίζουμε τα c_j - z_j για κάθε στήλη

Επιλογή Διανύσματος που θα Εισέλθει στη Βάση

- Το διάνυσμα που θα εισέλθει σε προβλήματα μεγιστοποιήσεως είναι αυτό με το μεγαλύτερο καθαρό οριακό εισόδημα (το πιο οφέλιμο)

Επιλογή Διανύσματος που θα Εξέλθει από τη Βάση

- Το διάνυσμα που θα εξέλθει σε προβλήματα μεγιστοποιήσεως είναι αυτό που συνεισφέρει λιγότερο στην αντικειμενική συνάρτηση, δηλαδή αυτό που τοποθετεί τον μεγαλύτερο περιορισμό στην τιμή που μπορεί να πάρει η μεταβλητή που θα εισέλθει (το λιγότερο ωφέλιμο)

Παράδειγμα Επιλογής Διανύσματος που θα Εξέλθει από τη Βάση

$3\,x_1 + 5\,x_2 + 1s_1 = 150$ (1ος περιορισμός)

$3\,x_1 + 1\,s_1 = 150$ ή $x_1 = 150 / 3$ για $s_1 = 0$ (μέγιστη τιμή x_1)

$8\,x_1 + 5\,x_2 + 1s_3 = 300$ (3ος περιορισμός)

$8\,x_1 + 1\,s_3 = 300$ ή $x_1 = 300 / 8$ για $s_3 = 0$ (μέγιστη τιμή x_1)

Ο 3ος περιορισμός είναι και ο πιο σκληρός, άρα διώχνουμε το αντίστοιχο διάνυσμα

Υπολογισμός Νέου Πίνακα Simplex

- Πραγματοποιώ πράξεις μεταξύ γραμμών ακολουθώντας του επόμενους βασικούς κανόνες:
  - Μπορώ να πολλαπλασιάζω οποιαδήποτε γραμμή με ένα μη μηδενικό αριθμό
  - Μπορώ να αντικαθιστώ τη γραμμή με το αποτέλεσμα πρόσθεσής της ή αφαίρεσής της με οποιοδήποτε γινόμενο άλλης

Παράδειγμα Υπολογισμού Νέου Πίνακα Simplex

- Αφού βασικό διάνυσμα θα γίνει αυτό που αντιστοιχεί στην μεταβλητή x_1, θέλω το διάνυσμα να είναι της μορφής [0,0,1]

- Πολλαπλασιάζω την 3η εξίσωση με 1/8 και έχω:
  $1/8\ (8\ x_1 + 5\ x_2 + 1\ s_3) = 1/8\ (300)$ ή
  $x_1 + 5/8\ x_2 + 1/8\ s_3 = 75/2$

- Πολλαπλασιάζω τη νέα γραμμή με 3 και την αφαιρώ από την 1:
  $0x_1 + 25/8\ x_2 + 1s_1 - 3/8\ s_3 = 75/2$

Ερωτήσεις...


Statistics show...
A × B=C
Bioeconomics
Today's News
Picasso's blue period
E=MC 2
$ $ $ $ $
©R. Morley Inc.

Ένα Παράδειγμα...

$$\max z = 524\, x_1 + 730\, x_2 + 834\, x_3 + 418\, x_4$$

...με τους παρακάτω περιορισμούς:

$$\begin{aligned}
1.5\, x_1 + x_2 + 2.4\, x_3 + x_4 &<= 2000\\
x_1 + 5x_2 + x_3 + 3.5x_4 &<= 8000\\
1.5\, x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 + x_4 &<= 5000
\end{aligned}$$

...και που στην πρότυπη μορφή γίνεται:

$$\begin{aligned}
1.5\, x_1 + x_2 + 2.4\, x_3 + x_4 + x_5 &= 2000\\
x_1 + 5x_2 + x_3 + 3.5x_4 + x_6 &= 8000\\
1.5\, x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 + x_4 + x_7 &= 5000
\end{aligned}$$

...Συνέχεια του Παραδείγματος...

$\alpha_1 = [1.5, 1, 1.5]$ $\alpha_5 = [1, 0, 0]$

$\alpha_2 = [1, 5, 3]$ $\alpha_6 = [0, 1, 0]$

$\alpha_3 = [2.4, 1, 3.5]$ $\alpha_7 = [0, 0, 1]$

$\alpha_4 = [1, 3.5, 1]$ $b = [2000, 8000, 5000]$

στήλες

Μια βασική λύση του συστήματος είναι η $x_1, x_2, x_6 <> 0$ και $x_3 = x_4 = x_5 = x_7 = 0$, αφού:

$$\begin{bmatrix} 1.5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1.5 & 3 & 0 \end{bmatrix} <> 0$$

...Συνέχεια του Παραδείγματος...

$$B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_6) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1.5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

όπου $\beta_1=\alpha_1$, $\beta_2=\alpha_2$, $\beta_3=\alpha_6$

Εάν εφαρμόσουμε τον τύπο $x_B = B^{-1} b$ ή επιλύσουμε το παρακάτω σύστημα...

$$\begin{aligned} 1.5x_1 + x_2 + 2.4x_3 + x_4 + x_5 &= 2000 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 3.5x_4 + x_6 &= 8000 \\ 1.5x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 + x_4 + x_7 &= 5000 \end{aligned}$$

λαμβάνουμε τη βασική λύση (η οποία κατά σύμπτωση είναι και δυνατή):
$x_{B1} = x_1 = 1000/3$, $x_{B2} = x_2 = 1500$, $x_{B3} = x_6 = 500/3$ και $x_3 = x_4 = x_5 = x_7 = 0$.

...Συνέχεια του Παραδείγματος...

Δεδομένου ότι από πριν...

$$\max z = 524\ x_1 + 730\ x_2 + 834\ x_3 + 418\ x_4$$

$$x_{B1} = x_1 = 1000/3,\ x_{B2} = x_2 = 1500,\ x_{B3} = x_6 = 500/3$$

...η αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι...

$$Z^0 = C_B\ X_B = c_{B1}\ x_{B1} + c_{B2}\ x_{B2} + c_{B3}\ x_{B3} \text{ ή}$$

$$Z^0 = C_B\ X_B = 524 \times 1000/3 + 730 \times 1500 = 1{,}269{,}000$$

…Άρα, Μέχρι Στιγμής Έχουμε...

$x_{B1} = x_1 = 1000/3$

$x_{B2} = x_2 = 1500$

$x_{B3} = x_6 = 500/3$

$x_3 = 0$

$x_4 = 0$

$x_5 = 0$

$x_7 = 0$

…και το εβδομαδιαίο κέρδος που συνεπάγεται η βασική αυτή λύση είναι...

$$Z^0 = C_B\, X_B = 1{,}269{,}000$$

Τώρα Μεταβάλουμε τη Στάθμη Μίας Μη Βασικής Μεταβλητής...

- Υποθέτουμε ότι η **στάθμη της δραστηριότητας α_3 αυξάνεται κατά μία μονάδα**
- Αυτό σημαίνει ότι τώρα θα παράγεται μία μονάδα του προϊόντος 3 ενώ **πριν δεν παραγόταν καμία**
- **Θα πρέπει να μεταβληθούν κατάλληλα οι στάθμες των βασικών μεταβλητών** ώστε να συνεχίσουν να ικανοποιούνται οι περιορισμοί του προβλήματος

Επομένως...

Εάν:

Κάθε στήλη της Α που δεν ανήκει στη Βάση μπορεί να εκφρασθεί σαν γραμμικός συνδυασμός των στηλών της Β

y_{13} η μείωση της στάθμης της βασικής δραστηριότητας 1

y_{23} η μείωση της στάθμης της βασικής δραστηριότητας 2

y_{33} η μείωση της στάθμης της βασικής δραστηριότητας 3

...τότε θα πρέπει...

$$1\ \alpha_3 = y_{13}\,\beta_1 + y_{23}\,\beta_2 + y_{33}\,\beta_3$$

$$\alpha_j = B\ y_j$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο $y_j = B^{-1}\,a_j$ και επιλύοντας το παρακάτω σύστημα...

$$1.5\,y_{13} + y_{23} + 0\,y_{33} = 2.4$$
$$1\,y_{13} + 5\,y_{23} + 1\,y_{33} = 1$$
$$1.5\,y_{13} + 3\,y_{23} + 0\,y_{33} = 3.5$$

ή

$y_{13} = 1.23$ μείωση παραγωγής 1

$y_{23} = 0.55$ μείωση παραγωγής 2

$y_{33} = -2.98$ αύξηση ωρών αργίας μηχ. Β

…και το Οριακό Καθαρό Εισόδημα...

...απαντά στο ερώτημα: ποιο το οικονομικό αποτέλεσμα της αυξήσεως της στάθμης της μη βασικής δραστηριότητας 3 κατά μία μονάδα;

- **Θα αυξηθεί η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (κατά c_3) αφού αυξάνεται η τιμή της μεταβλητής x_3**
- **Θα μειωθεί η τιμή της z^0 αφού οι βασικές μεταβλητές μειώνονται κατά y_{13}, y_{23} και y_{33}**
- **Το τελικό αποτέλεσμα στο Οριακό Καθαρό Εισόδημα θα είναι:**

$$c_3 - z_3 = c_3 - (c_1\, y_{13} + c_2\, y_{23} + c_6\, y_{33}) =$$
$$834 - (1.23 \times 524 + 0.55 \times 730 - 2.98 \times 0) = -212$$

- **Επομένως ορθά επιλέξαμε την x_3 ως μη βασική μετ.!**